Лекция 9
Көп өлшемді дискретті кездейсоқ шамалар және үлестірім заңдары.

Айталық (Ω, F, P) дискретті ықтималдық кеңістігінде анықталған $\xi_1 = \xi_1(\omega),\ \xi_2 = \xi_2(\omega),\ \dots,\ \xi_r = \xi_r(\omega)$ кездейсоқ шамалары берілсін және $\xi_i : \Omega \to \mathrm{X}_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots\},\quad i = 1,2,\dots,r$ болсын. Біз бұдан бұрын көрсеткеніміздей $\mathrm{P}\{\xi_i = x_{ik}\}, k = 1,2,\dots$ ықтималдықтары арқылы ξ_i кездейсоқ шамаларының кез келген B сандық жиынына жататын мәндер қабылдау ықтималдықтарын былай анықтауға болады:

$$\mathrm{P}\{\xi_1 \in B_1\} = \sum_{j: x_{1j} \in B_1} \mathrm{P}\{\xi_1 = x_{1j}\}, \dots, \mathrm{P}\{\xi_r \in B_r\} = \sum_{j: x_{rj} \in B_r} \mathrm{P}\{\xi_r = x_{rj}\}$$

Анықтама. $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$ векторы *кездейсоқ вектор* немесе r *--лшемді (к-п -лшемді) кездейсоқ шама* деп аталады, ал мына ықтималдықтар

$$\mathrm{P}_\xi(x_1, \dots, x_r) = \mathrm{P}\{\omega : \xi_1(\omega) = x_1, \xi_2(\omega) = x_2, \dots, \xi_r(\omega) = x_r\} \qquad (10)$$

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$ кездейсоқ векторының *ықтималдықтық үлестірім заңы* деп немесе $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ кездейсоқ шамаларының *бірлескен үлестірімі (бірлескен үлестірім заңы)* деп аталады.

Мәселен бұрыныракта біз полиномдық үлестірімді қарастырған кезде (1-тарау, §3, п.3.2) іс жүзінде $\nu(\omega) = (\nu_1(\omega),\ \nu_2(\omega), \dots,\ \nu_r(\omega))$ векторлық кездейсоқ шамасын зерттегенбіз және бұл вектор үшін

$$\mathrm{P}\{\nu_1 = n_1, \dots, \nu_r = n_r\} = \mathrm{P}_\nu(n_1, n_2, \dots, n_r) =$$
$$= \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_r!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r}$$

болатындығын көрсеткенбіз.

Енді қарапайымдылық үшін $r = 2$ жағдайын қарастыралық. Онда ξ_1, ξ_2 кездейсоқ шамаларының бірлескен үлестірім заңын (екі өлшемді үлестірім заңын) мынандай таблица арқылы беруге болады:

ξ_1/ξ_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n_2}	...
x_{11}	p_{11}	p_{12}	...	p_{1n_2}	...
x_{12}	p_{21}	p_{22}	...	p_{2n_2}	...
...	...	...	...	...	...
x_{1n_1}	$p_{n_1 1}$	$p_{n_1 2}$	...	$p_{n_1 n_2}$	...
...	...	...	...	...	...

Бұл таблицадағы 1-баған мен 1-жатық жолда сәйкес ξ_1, ξ_2 кездейсоқ шамаларының қабылдайтын мәндері жазылған, ал

$$p_{ij} = P\left\{\xi_1 = x_{1i},\ \xi_2 = x_{2j}\right\} \text{ және } p_{ij} \ge 0,\quad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$$

$\xi_1,\ \xi_2$ кездейсоқ шамаларының екі өлшемді үлестірім заңы арқылы олардың жеке-жеке (бір өлшемді) үлестірім заңдарын (*маргиналды үлестірімдерін*) былай табуға болады:

$$P\left\{\xi_1 = x_{1i}\right\} = p_{i\cdot} = \sum_j p_{ij},\ P\left\{\xi_2 = x_{2j}\right\} = p_{\cdot j} = \sum_i p_{ij} \qquad (11)$$

Мұндағы $p_{i\cdot}$ және $p_{\cdot j}$ – енгізілген белгілеулер.

Шындығында да $\left\{\xi_1 = x_{1i}\right\} = \sum_{j=1}^{\infty}\left\{\xi_1 = x_{1i},\ \xi_2 = x_{2j}\right\}$, себебі $\sum_j \left\{\xi_2 = x_{2j}\right\} = \Omega$, демек

$\left\{\xi_1 = x_{1i}\right\} = \left\{\xi_1 = x_{1i}\right\} \cap \Omega = \sum_j \left\{\xi_1 = x_{1i}, \xi_2 = x_{2j}\right\}$

Бұдан

$$P\left\{\xi_1 = x_{1i}\right\} = \sum_j P\left\{\xi_1 = x_{1i},\ \xi_2 = x_{2j}\right\} = \sum_j p_{ij} = p_{i\cdot}$$

Жалпы жағдайда да, егер r-өлшемді үлестірім заңы берілсе, онда олар арқылы кез келген m өлшемді $(m = 1, 2, \ldots, r-1)$ үлестірім заңдарын табуға болады. Мәселен, егер

$$p_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \mathrm{P}\left\{\xi_1 = x_{1i_1}, \xi_2 = x_{2i_2}, \ldots, \xi_r = x_{ri_r}\right\}$$

белгілеулерін енгізсек, онда:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left\{\xi_1 = x_{1i_1}\right\} &= \sum_{i_2\ i_3\ \ldots\ i_r} p_{i_1\ i_2\ \ldots\ i_r} = p_{i_1 \ldots} \\ \mathrm{P}\left\{\xi_1 = x_{1i_1}, \xi_2 = x_{2i_2}\right\} &= \sum_{i_3\ i_4\ \ldots\ i_r} p_{i_1\ i_2\ \ldots\ i_r} = p_{i_1\ i_2 \ldots} \end{aligned} \qquad (12)$$

Жалпы түрде:

$$\mathrm{P}\left\{\xi_{j_1} = x_{1i_{j_1}}, \xi_{j_2} = x_{2i_{j_2}}, \ldots, \xi_{j_m} = x_{mi_{j_m}}\right\} = \sum p_{i_1\ i_2\ \ldots\ i_r}$$

Соңғы қосынды барлық $j_1, j_2, \ldots, j_m$-нен өзгеше $i_1, i_2, \ldots, i_r$ индекстері бойынша алынады.

Енді r-өлшемді ұлестірімдер үшін $p_{i_1 i_2 \ldots i_r} \ge 0$, $\sum_{i_1 i_2 \ldots i_r} p_{i_1 i_2 \ldots i_r} = 1$ шарттары орындалатындығына назар аудара кетелік.

Бір өлшемді кездейсоқ шамаларды қарастырған кездегі секілді біз егер $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ кездейсоқ шамаларының r-өлшемді үлестірім заңы берілсе олар (кездейсоқ шамалар) да берілген деп есептейміз.

Мысалдар

1) Айталық $\Omega = \{(1,1), (-1,1), (1,-1), (-1,-1)\}$ болсын және барлық элементар оқиғалар тең ықтималдықты болсын. ξ_1 және ξ_2 кездейсоқ шамаларын былай анықталық:

$$\xi_1 = \xi_1(i,j) = i, \quad \xi_2 = \xi_2(i,j) = j, \qquad i, j = -1,1$$

Онда кез-келген (i,j) үшін

$$P\{\xi_1 = i, \xi_2 = j\} = \frac{1}{4}$$

және (9) формула бойынша

$$P\{\xi_1 = i\} = P\{\xi_1 = i, \xi_2 = -1\} + P\{\xi_1 = i, \xi_2 = 1\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \ i = -1,1$$

Сол сияқты

$$P\{\xi_2 = j\} = \frac{1}{2}, \ \ j = -1,1$$

Табылған үлестірім заңдары (ξ_1, ξ_2) кездейсоқ шамасының үлестірім заңын мынандай таблица түрінде беруге болатынын к-рсетеді.

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-1	+1
-1	1/4	1/4
1	1/4	1/4

2) Айталық Ω, ξ_1, ξ_2 1-мысалдағыдай анықталсын, ал $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ үшін

$$P_\xi\{(1,1)\} = P_\xi\{(-1,-1)\} = \frac{1}{2}$$

$$P_\xi\{(-1,1)\} = P_\xi\{(1,-1)\} = 0$$

болсын. Онда, мәселен, $P\{\xi_1 = -1, \ \xi_2 = +1\} = P_\xi\{(-1,1)\} = 0$ яғни (ξ_1, ξ_2)-нің үлестірім заңы алдыңғы мысалдағы (ξ_1, ξ_2)-нің үлестірім заңынан бөлек.

Бір өлшемді үлестірімдер енді былайша анықталады да

$$P\{\xi_1 = -1\} = P\{\xi_1 = 1\} = P\{\xi_2 = -1\} = P\{\xi_2 = 1\} = \frac{1}{2}$$

алдыңғы мысалдағы бір өлшемді үлестірім заңдарымен бірдей болады.

3) ξ_1, ξ_2 кездейсоқ шамаларының үлестірім заңын төмендегі таблица арқылы анықталық:

$\xi_1 \backslash \xi_2$	-1	0	1
-1	1/18	1/6	1/9
0	1/6	1/6	1/9
1	1/18	0	1/6

Онда (9) формула бойынша

$$P\{\xi_1 = -1\} = P\{\xi_1 = -1,\, \xi_2 = -1\} + P\{\xi_1 = -1,\, \xi_2 = 0\} +$$

$$+ P\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 1\} = \frac{1}{18} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

Сол сияқты

$$P\{\xi_1 = 0\} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9} \qquad P\{\xi_1 = 1\} = \frac{1}{18} + \frac{1}{6} = \frac{2}{9}$$

$$P\{\xi_2 = -1\} = \frac{1}{18} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{5}{18} \qquad P\{\xi_2 = 0\} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P\{\xi_2 = 1\} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{7}{18}$$

Бұдан мынандай қорытындыға келеміз: ξ_1 кездейсоқ шамасының үлестірім заңын табу үшін таблицадағы сәйкес жатық жолдардағы ықтималдықтарды қосу керек екен де, ξ_2 үшін сәйкес қосуды тік жолдар үшін орындау керек екен.

4) Егер ξ_1 кездейсоқ шамасы n_1, ξ_2 кездейсоқ шамасы $n_2, ..., \xi_r$ кездейсоқ шамасы n_r әртүрлі мәндер қабылдайтын болса, және де барлық сәйкес $x_{1i_1}, x_{2i_2}, \dots, x_{ri_r}$ қабылданатын мәндер үшін

$$P\left\{\xi_1 = x_{1i_1}, \dots, \xi_r = x_{ri_r}\right\} = \frac{1}{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r}$$

болса, онда біз $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_r)$ көп өлшемді кездейсоқ шамасын $A = \left\{\left(x_{1i_1}, \dots, x_{ri_r}\right):\ i_j = 1,2,\dots,n_j;\ \ j = 1,\dots,r\right\}$ жиынында *бір қалыпты үлестірілген* көп өлшемді (r -өлшемді) кездейсоқ шама деп атаймыз.

Мәселен, 1-ші мысалда

$$r = 2,\ \ x_{11} = -1,\ \ x_{12} = 1,\ \ x_{21} = -1,\ \ x_{22} = 1,$$

$$P\left(\xi_1 = x_{1i},\ \xi_2 = x_{2j}\right) = \frac{1}{4} \qquad (i, j = 1,2)$$

Енді кездейсоқ шамалардың шартты үлестірімдері ұғымына тоқтала кетейік. Егер $\xi(\cdot):\ \Omega \to X = \{x_1, x_2, \ldots\},\ \eta(\cdot):\ \Omega \to Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ дискретті кездейсоқ шамалары берілсе, онда біз $P_{i/j}$ арқылы $A_i = \{\omega:\ \xi(\omega) = x_i\}$ оқиғасының $B_j = \{\omega:\ \eta(\omega) = y_j\}$ оқиғасына $(P(B_j) > 0)$ байланысты шартты ықтималдығын белгілейміз:

$$P_{i/j} = P(A_i \,/\, B_j) = \frac{P(A_i B_j)}{P(B_j)}$$

Егер кездейсоқ шамалар арқылы айқын белгілесек

$$P_{i/j} = P\{\xi = x_i \ / \ \eta = y_i\} = \frac{P\{\xi = x_i\,;\eta = y_j\}}{P\{\eta = y_j\}} = \frac{P_{ij}}{P_{\cdot j}} \tag{12}$$

Сонымен $P_{i/j}$ ξ *кездейсоқ шамасының* x_i *мәнін* η *кездейсоқ шамасы* y_j *мәнін оң ықтималдықпен қабылдаған кездегі шартты ықтималдығы* (12) формуладан

$$P_{ij} = P_{\cdot j} \cdot P_{i/j}\,,$$

ал соңғы қатынастың екі жағын барлық j арқылы қоссақ

$$P\{\xi = x_i\} = P_{i.} = \sum_j P_{\cdot j} P_{i/j} = \sum_j P\{\eta = y_j\} P\{\xi = x_i \ / \ \eta = y_j\} \tag{12'}$$

ықтималдықтар үшін толық ықтималдықтар формуласын аламыз. Айтылғандарды үш, төрт т.с.с. кездейсоқ шамалар үшін де жалпыландыруға болады. Мәселен жоғарыдағыдай анықталған ξ, η және $\varphi\ (\cdot):\ \Omega \to Z = \{z_1, z_2, \ldots\}$ кездейсоқ шамалары үшін $P_{\cdot jk} > 0,\ P_{\cdot\cdot k} > 0$ болса, сәйкес

$$P_{i/j,k} = P\{\xi = x_i \ / \ \eta = y_j,\, \varphi = z_k\} = \frac{P\{\xi = x_i\,;\eta = y_j;\ \varphi = z_k\}}{P\{\eta = y_j;\ \varphi = z_k\}} = \frac{P_{ijk}}{P_{\cdot jk}} \tag{12''}$$

$$P_{ij/k} = P\{\xi = x_i;\ \eta = y_j; /\ \varphi = z_k\} = \frac{P\{\xi = x_i\,;\eta = y_j;\ \varphi = z_k\}}{P\{\varphi = z_k\}} = \frac{P_{ijk}}{P_{\cdot\cdot k}} \quad \text{т.с.с}$$

Бұлардан үш кездейсоқ шаманың бірлескен үлестірімі үшін

$$P_{ijk} = P_{\cdot jk} \cdot P_{i/j,k} = P_{\cdot\cdot k} P_{ij/k}$$

ал маргиналды үлестірімдер үшін

$$P\{\xi = x_i;\ \eta = y_j\} = P_{ij\cdot} = \sum_k P_{ijk} = \sum_k P_{\cdot jk} P_{i/j,k} = \sum_k P_{\cdot\cdot k} P_{ij/k}$$

$$P\{\xi = x_i\} = P_{i\cdot\cdot} = \sum_{j,k} P_{ijk} = \sum_{j,k} P_{\cdot jk} P_{i/j,k} = \sum_{j,k} P_{\cdot\cdot k} P_{ij/k}$$

формулаларын аламыз.

Айтылғандар ξ кездейсоқ шамасының $\{\eta = y\}$ $(P\{\eta = y\} > 0)$ оқиғасына байланысты (η кездейсоқ шамасы y мәнін қабылдағандағы*) шартты үлестірім функциясы* $F_\xi(x/y)$ функциясын былай анықтауға негіз болады

$$F_{\xi/\eta}(x/y) = P\{\xi \le x \ / \ \eta = y\} \tag{12'''}$$

Анықтамадан

$$F_{\xi/\eta}(x/y_j) = \sum_{i:\,x_i \le x} P_{i/j} = \frac{1}{P_{\cdot j}} \sum_{i:\,x_i \le x} P_{ij} = \sum_{i:\,x_i \le x} P\{\xi = x_i \ / \ \eta = y_j\}$$

болатынын көреміз. Сонымен бірге анықтамадан шартты үлестірім функциясының да кездейсоқ шаманың үлестірім функциясына (шартсыз үлестірім функциясына) тән қасиеттерге ие болатынын байқау қиын емес (Дәлелдеңіз!). Сол сияқты

$F_{\xi\eta/\varphi}(x,y/z)$ $F_{\xi/\eta,\varphi}(x/y,z)$ т.с.с. шартты үлестірім функцияларын да қалай анықтау керектігі жоғарыда айтылғандардан кейін түсінікті болар деп ойлаймыз. Оқушыларға қажетті анықтамаларды өз бетінше жазып көруді ұсынамыз.

Әрине, соңғы қатынастан шартсыз үлестірім функциясын шартты үлестірім функциясы арқылы былай

$$F_{\xi}(x) = \sum_j F_{\xi/\eta}(x/y_j)P\left\{\eta = y_j\right\} = \sum_j P_{\cdot j}F_{\xi/\eta}(x/y_j)$$

анықтауға болатынын көреміз.

Мысалдар

5) ξ кездейсоқ шамасы бүтін теріс емес мәндер қабылдайтын кездейсоқ шама және

$$P\left\{0 < \xi < \infty\right\} = 1, \quad P\left\{\xi = k+1/\xi > k\right\} = p, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

болсын. Осы кездейсоқ шаманың үлестірім заңын, яғни $P\left\{\xi = k\right\}, \quad k = 1,2,\ldots$ ықтималдықтарын табалық.

Шешуі. $\left\{\xi = k+1\right\} \subseteq \left\{\xi > k\right\} = \sum\limits_{m=k+1}^{\infty}\left\{\xi = m\right\}$ болғандықтан былай жаза аламыз:

$$p = P\left\{\xi = k+1/\xi > k\right\} = \frac{P\left\{\xi = k+1\right\}}{P\left\{\xi > k\right\}}$$

Бұдан

$$p_{k+1} = P\left\{\xi = k+1\right\} = p \cdot P\left\{\xi > k\right\} = p\sum_{m=k+1}^{\infty} p_m$$

Соңғы қатынастан $k = 0$ болғанда $P\left\{0 < \xi < \infty\right\} = P\left\{\xi \geq 1\right\} = \sum\limits_{m=1}^{\infty} p_m = 1$ болатындықтан $p_1 = p$ болатыны шығады. Ары қарай $k = 1$ деп алсақ

$$p_2 = p\sum_{k=2}^{\infty} p_m = p(1 - p_0 - p_1) = p(1-p),$$

себебі $p_0 = 0$. Сол сияқты $k = 2$ үшін

$$p_3 = p(1 - p_1 - p_2) = p(1 - p - p(1-p)) = p(1-p)^2$$

Ақыр соңында индукцияны пайдаланып

$$p_k = P\left\{\xi = k\right\} = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1,2,\ldots$$

қатынасын аламыз, яғни ξ – геометриялық кездейсоқ шама болады екен.

Анықтама. Кез келген $x_1, x_2, \ldots, x_r \in R^{'}$ үшін анықталған

$$F_{\xi}(x_1,x_2,\ldots,x_r) = F_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_r}(x_1,x_2,\ldots,x_r) =$$
$$= P\left\{\omega : \xi_1(\omega) \leq x_1, \xi_2(\omega) \leq x_2, \ldots, \xi_r(\omega) \leq x_r\right\}$$

функциясы $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$ кездейсоқ векторының *үлестірім функциясы* немесе $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ кездейсоқ шамаларының *бірлескен үлестірім функциясы* немесе *к-п -лшемді* (r -өлшемді) *үлестірім функциясы* деп аталады.

Бұл функцияның да қасиеттері (бір өлшемді) үлестірім функциясының қасиеттеріне ұқсас: *әр аргументі бойынша монотонды кемімейтін функция; әр аргументі бойынша оң жағынан үзіліссіз және*

$$F_\xi(+\infty, +\infty, \ldots, +\infty) = 1, \quad F_\xi(x_1, \ldots, x_i, -\infty, x_{i+1}, \ldots, x_r) = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, r)$$

Тек айта кететін бір нәрсе бұл функцияның қосымша тағы бір *теріс емес анықталғандық* қасиеті деп аталатын аса маңызды қасиеті бар. Ол туралы біз кейін (2-бөлімде) жалпы жағдайды қарастырған кезде толығырақ айтатын боламыз. Әзірше оқырманға мына есепті шығаруды ұсынамыз.

Есеп. $F_\xi(x_1, x_2)$ функциясының жоғарыдағы келтірілген қасиеттерін дәлелдеңіз. Теріс емес анықталғандық қасиеті мына түрде жазылады: кез келген $a_1 < b_1, \quad a_2 < b_2$, нақты сандары үшін

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{a_1 < \xi_1 \le b_1, a_2 < \xi_2 \le b_2\} = F_{\xi_1,\xi_2}(b_1, b_2) - F_{\xi_1,\xi_2}(a_1, b_2) - \\ - F_{\xi_1,\xi_2}(b_1, a_2) + F_{\xi_1,\xi_2}(a_1, a_2) \ge 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Әрине

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{\substack{i_1 : x_{1i_1} \le x_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ i_r : x_{ri_r} \le x_r}} \mathrm{P}\{\xi_1 = x_{1i_1}, \ldots, \xi_r = x_{ri_r}\} = \sum_{\substack{i_1 : x_{1i_1} \le x_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ i_r : x_{ri_r} \le x_r}} p_{i_1 i_2 \ldots i_r},$$